Az EKS-módszer karakterizációja

Csató László
laszlo.csato@uni-corvinus.hu

MTA Számítástechnikai és Automatizálási Kutatóintézet (MTA SZTAKI)
Mérnöki és Üzleti Intelligencia Kutatólaboratórium
Operációkutatás és Döntési Rendszerek Kutatócsoport

Budapesti Corvinus Egyetem (BCE)
Közgazdaságtudományi Kar
Operációkutatás és Aktuáriustudományok Tanszék

Gazdaságstatisztika szerepe az oktatásban
Óbudai Egyetem, Keleti Károly Gazdasági Kar

Budapest
2017. szeptember 27.

Áttekintés

1. Az EKS-módszer
2. Kapcsolat a páros összehasonlítás mátrixokkal
3. Az EKS-módszer karakterizációja
4. Összefoglalás

Nemzetközi árszínvonal-összehasonlítás

- Az egyes termékek árai azonos mértékegységre hozhatók az aktuális valutaárfolyam segítségével
- p_i^A az i termék ára A országban
- p_i^B az i termék ára B országban
- Az n termék mindegyikénél különböző p_i^A / p_i^B relatív árak

Relatív árszínvonal: Hogyan súlyozzunk?

1. A ország fogyasztói kosarával
2. B ország fogyasztói kosarával
3. Fischer-index:

$$I_p^F(A/B) = \sqrt{I_p^A \cdot I_p^B} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n q_i^A p_i^A}{\sum_{i=1}^n q_i^A p_i^B} \cdot \frac{\sum_{i=1}^n q_i^B p_i^A}{\sum_{i=1}^n q_i^B p_i^B}}$$

Probléma: a páronkénti Fischer-indexek rendelkeznek a reciprocitási tulajdonsággal ($I_p^F(A/B) = 1/I_p^F(B/A)$), de nem feltétlenül tranzitívak

Az EKS [Éltető – Köves – Szulc (Schultz)]-módszer

Definíció (OECD, Glossary of statistical terms)

A multilateral method developed by O. Elteto, P. Koves and B. Szulc [Schultz] that computes the *n*th root of the product of all possible Fisher indexes between *n* countries. It has been used at the detailed heading level to obtain heading parities, and also at the GDP level. EKS has the properties of *base-country invariance* and *transitivity*.

Használata (OECD, Glossary of statistical terms)

It is the method used by Eurostat and the OECD to calculate PPPs for basic headings and to aggregate basic heading PPPs to obtain PPPs for each level of aggregation up to and including GDP.

Strictly speaking, the EKS is a procedure whereby any set of intransitive binary index numbers are made transitive while respecting characteristicity.

Többszempontú döntési problémák egy modellje

- A döntéshozó számszerű választ ad a 'Hányszor jobb az i alternatíva a j-nél?' kérdésre
- Ezeket az értékeket egy mátrixba gyűjtjük

Páros összehasonlítás mátrix

$\mathbf{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$ egy *páros összehasonlítás mátrix*, ha $a_{ji} = 1/a_{ij}$ minden $1 \leq i, j \leq n$-re.
Legyen $\mathcal{A}^{n \times n}$ az $n \times n$-es páros összehasonlítás mátrixok halmaza.

Konzisztencia

Az $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in \mathcal{A}^{n \times n}$ páros összehasonlítás mátrix *konzisztens*, ha $a_{ik} = a_{ij} a_{jk}$ minden $1 \leq i, j, k \leq n$-re.

Súlyvektor

$\mathbf{w} = [w_i] \in \mathbb{R}_+^n$ egy *súlyvektor*, ha $\sum_{i=1}^n w_i = 1$.
Legyen $\mathcal{R}^n$ az n dimenziós súlyvektorok halmaza.

Páros összehasonlítás mátrix vs. EKS-módszer

Súlyozási módszer

Az $f : \mathcal{A}^{n \times n} \to \mathcal{R}^n$ függvény egy *súlyozási módszer*.

Logaritmikus legkisebb négyzetek módszere (*LLSM*)

A *logaritmikus legkisebb négyzetek módszere* az $\mathbf{A} \to \mathbf{w}^{LLSM}(\mathbf{A})$ függvény, ahol a $\mathbf{w}^{LLSM}(\mathbf{A})$ súlyvektor a következő optimalizálási feladat megoldása:

$$\min_{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n_+, \sum_{i=1}^n w_i = 1} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left[\log a_{ij} - \log \left(\frac{w_i}{w_j} \right) \right]^2 . \qquad (1)$$

Az *LLSM*-et mértani közép módszernek is nevezik, mert (1) megoldása

$$w_i = \frac{\prod_{j=1}^n a_{ij}^{1/n}}{\sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^n a_{ij}^{1/n}} .$$

A logaritmikus legkisebb négyzetek módszere azonos az EKS-módszerrel!

Súlyozási módszerek tulajdonságai

- Axiomatikus megközelítés: axiómák (tulajdonságok) bevezetése, majd annak vizsgálata, vajon az egyes módszerek teljesítik-e ezeket
- *Karakterizáció*: a tulajdonságok egyértelműen meghatároznak egy módszert

Korrektség (correctness, CR)

Legyen $\mathbf{A} \in \mathcal{A}^{n \times n}$ egy konzisztens páros összehasonlítás mátrix. Az $f : \mathcal{A}^{n \times n} \to \mathcal{R}^n$ súlyozási módszer *korrekt*, ha $f_i(\mathbf{A})/f_j(\mathbf{A}) = a_{ij}$ minden $1 \leq i, j \leq n$-re.

Konzisztencia helyreállítási transzformáció

Legyen $\mathbf{A} \in \mathcal{A}^{n \times n}$ egy páros összehasonlítás mátrix, $1 \leq i, j, k \leq n$ pedig három különböző alternatíva. Az (i, j, k) hármason végrehajtott α paraméterű *konzisztencia helyreállítási transzformáció* eredménye az $\hat{\mathbf{A}} \in \mathcal{A}^{n \times n}$ páros összehasonlítási mátrix, ahol $\hat{a}_{ij} = \alpha a_{ij}$ ($\hat{a}_{ji} = a_{ji}/\alpha$), $\hat{a}_{jk} = \alpha a_{jk}$ ($\hat{a}_{kj} = a_{kj}/\alpha$), $\hat{a}_{ki} = \alpha a_{ki}$ ($\hat{a}_{ik} = a_{ik}/\alpha$) és $\hat{a}_{\ell m} = a_{\ell m}$ minden más elemre.

Konzisztencia helyreállítás

Példa: konzisztencia helyreállítási transzformáció

Tekintsük a következő páros összehasonlítás mátrixokat:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1/8 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ és } \hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1/2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1/4 & 1/2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$\hat{\mathbf{A}}$ megkapható $\mathbf{A}$-ból egy, az $(1,2,4)$ hármason végrehajtott $\alpha = 2$ paraméterű konzisztencia helyreállítási transzformációval.

Konzisztencia helyreállításától való függetlenség (*ICR*)

Legyen $\mathbf{A}, \hat{\mathbf{A}} \in \mathcal{A}^{n \times n}$ két páros összehasonlítási mátrix úgy, hogy $\hat{\mathbf{A}}$ megkapható az $\mathbf{A}$ mátrixon végzett konzisztencia helyreállítási transzformációkkal. Az $f : \mathcal{A}^{n \times n} \to \mathcal{R}^n$ súlyozási módszer *független a konzisztencia helyreállítási transzformációra nézve*, ha $f(\mathbf{A}) = f\left(\hat{\mathbf{A}}\right)$.

Az *LLSM* / EKS-módszer karakterizációja

Lemma

Az LLSM / EKS-módszer korrekt és független a konzisztencia helyreállításától.

Tétel

A logaritmikus négyzetek módszere / EKS-módszer az egyetlen korrekt és konzisztencia helyreállításától független súlyozási módszer.

Lemma

CR és ICR logikailag független axiómák.

Összegzés

Mire jó az axiomatikus tárgyalás?

- Segít a módszerek jobb megértésében
- A karakterizációban szereplő tulajdonságok elfogadása egyértelműsíti a használandó módszert
- Bármely más eljárás alkalmazása esetén meg kell tudni magyarázni, melyik axiómá(ka)t hagyjuk el és mi indokolja ezt

Gazdaságstatisztika az oktatásban

- Elmélet és gyakorlat összekapcsolása
- Elévülhetetlen szerepe van ennek az előadásnak a létrejöttében!

Köszönöm a figyelmet!