

Normális?

Dr. Nagy Viktor

Egyetemi docens, Óbudai Egyetem, Keleti Károly Gazdasági Kar
nagy.viktor@kgk.uni-obuda.hu

Absztrakt: A modellezés a mérnöki, a hadászati, és a természettudományok mellett a gazdasági életben is nagy szerepet kap. Az egyes rendszerek strukturált, matematikai leírásának igénye évezredekre tekint vissza. Igény merülhet fel a múltbéli tendenciák jövőre való kivetítésére, előrejelzésre, összefüggések keresésére különböző események között, de arra is, hogy egyes folyamatok előírt alakulását ellenőrizni lehessen. Erre nyújtanak lehetőséget különböző matematikai-statisztikai módszerek, melyek elméleti és empirikus eloszlások összevetésével lehetőséget biztosítanak arra, hogy az egyes folyamatokban megfigyelt változatosságot a természetes véletlen ingadozásokra vagy külső okozatokra lehessen visszavezetni. A normális eloszlások gyakorlati jelentőségére mutat rá a tanulmány, annak néhány jellemzőjét ragadja ki és vizsgálja, mely segítséget nyújthat az ilyen irányú vizsgálatok végzésében.

Kulcsszavak: normális eloszlás, standard normális eloszlás

1 Bevezetés

Az ember alapvető természetéhez tartozik a gyűjtögetés. Az ősközösségektől kezdődően a gyűjtögető életmóddal kezdetét vette e soha véget nem érő folyamat. Egyes üzleti modellek építenek is erre az ősi ösztönre: mikor például gyerekeknek szánt különböző állatos matricalbumok értékesítését lehet megfigyelni, de akár az elmúlt hetekben folytatott egyik gyorsétterem gyakorlatát is erre lehet visszavezetni, melyben különböző színű poharakat lehetett gyűjteni “ingyen”, pusztán az egyik termékegyüttes, menü megvásárlásával. A közgazdaságtanban persze alapvetően igaz, hogy nincs ingyen ebéd, vagyis az ilyen ajándékokért is (meg)fizet a vásárló. A gyűjtögető szenvedélyre alapoznak az egyes bevásárlóközpontok különböző pontgyűjtő hűségkártyái is, melyekkel fillérekért eladja magát az ügyfél, azaz szokásainak kiismerhetőségét teszi lehetővé. Az ember tehát az adataival fizet, melyet majd a vállalat vált (nem) aprópénzre, például mikor különböző célzott megkeresésekkel ösztönöz vásárlásra. Az ilyen kártyák a valahova való tartozás igényére is építenek, illetve arra, hogy senki nem szívesen hagyja félbe egy megkezdett gyűjtögetését azért, hogy egy konkurens helyen újra kezdje az egészet előről. Ha repülőúttal gyűjtött pontokról van szó,

akkor pedig még nagyobb lehet a belső készletés kitartani egy adott cégcsoport mellett. Persze, vannak kivételek, de az ember a természetében, ösztöneiben kódolt viselkedések elől nehezen tud kitérni – a többség nem is tud. Az üzleti szektor pedig már régen nem enged(het)i meg magának azt a luxust, hogy ezeket ne használja ki. Bár etikailag vitathatóak ezek a gyakorlatok, jogszabályi előírásokat nem sértenek. Ahogyan az sem, ha egyes előrecsomagolt termékek esetén a korábbival azonos csomagolásban már kevesebb töltőtömeg kap helyet. Mivel a vásárlónak nincs annyi ideje, hogy mindig ellenőrizze a feltüntetett tömeget, könnyen lehet, hogy a megváltozott tömeg feltüntetése teljesen elkerüli figyelmét, mikor a szokásos terméket a kosarába helyezi. Ilyenkor jogilag nem történik megtévesztés, vagy csalás, a gyakorlatban viszont mégis csak otthon döbben rá a vásárló, hogy a korábban megszokottnál kevesebbet kapott ugyanannyi pénzéért.

Számos példát találni a viselkedésgazdaságtan területén arra, hogy egyes hatásokkal hogyan lehet befolyásolni a fogyasztói döntéseket. A hatást csak fokozza, ha különösen komoly, egészségügyi területet érint az eset, mint amilyen például a covid19 járvány. (Kolnhofer-Derecskei Anita, Csongrádi Gyöngyi, Tóth Arnold, 2022)

Vannak olyan helyzetek azonban, amik már kimerítik a jogsértés fogalmát: ha az előrecsomagolt termékeken a feltüntetett névleges mennyiségnek ha nem felel meg a termék.

Számos esetben előfordul, hogy a terméken feltüntetett érték (pl. töltőtömeg) nem pontosan egyezik a valóssal. Ezek egy része szabad szemmel is észrevehető. Két négyliteres kiszerezésű folyékony mosószeres flakont egymás mellé helyezve látható, hogy van egy kis eltérés a töltési térfogatokban. Vagy két kilós kenyeret pontosan lemérve bizony előfordul, hogy nem egyforma nehezek, és ráadásul egyik sem pontosan egy kilós tömegű. Ezt egy otthoni, konyhai kis mérlegen bárki ellenőrizheti. Vagy felelőtlenség már valakiben a kérdés, hogy egy százas csomag papírzsebkendőben vajon tényleg pontosan száz darab van? Bizony, előfordul, hogy nemleges választ kell adni erre a kérdésre. Az embereket ezek a kis eltérések jellemzően nem zavarják, hiszen ki tudná garantálni azt, hogy sütés után pontosan ugyanannyit nyomjon a mérlegen a két kenyér? Vagy száradás után a rúd szalámi? Ez egy olyan terület, ahol a jog is ismeri a való élet jelenségeit, és egyben szabályozza is. A dolgoknak megvan a maguk természetes ingadozása, az egyes töltőgépeknek pedig bizonyos pontossága, vagy ha úgy tetszik pontatlansága, amit a jog – bizonyos határokon belül – elismer és tolerál. A különböző eredmények adódhatnak mérési hibákból is.

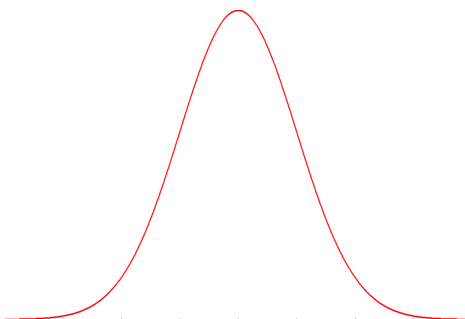
2 Az út

2.1 Galilei, de Moivre és Gauss

Már Galileo Galilei (1564-1642) csillagászati megfigyelései során észrevette, hogy amikor az egyes égitestek távolságát méri újra és újra, akkor különböző eredményeket kap, amik nem a számítási módszereiben rejlő hibáknak róhatóak fel, hanem méréseinek pontatlanságára vezethetők vissza. Feltűnt viszont, hogy ezek a különböző mérések egy érték körül csoportosulnak, és ehhez viszonyítva kisebb eltérésekből többet, nagyobb eltérésekből pedig kevesebbet figyelt meg. A különböző mérési eredmények ráadásul szimmetrikus elhelyezkedést mutattak a központi érték körül. (Bellos, Alex, 2010)

Magát a jelenséget görbével 1720 körül Abraham de Moivre (1667-1754) írta le, amikor a különböző esélyek és valószínűségek matematikáját kutatta. (David Freedman, Robert Pisani, Roger Purves, 2007)

A problematikával Carl Friedrich Gauss (1777-1855) is foglalkozott, aki megalkotta a jellegzetes haranggörbét, amit normális eloszlásnak vagy normál eloszlásnak is neveznek. Az 1. ábra egy tipikus ilyen eloszlás sűrűségfüggvényét mutatja.



1. ábra: Gauss-görbe
Forrás: saját szerkesztés

A vízszintes tengelyen az egyes kimeneti értékek, a függőleges tengelyen pedig az egyes előfordulási gyakoriságok kerülnek feltüntetésre. Mivel az alakja a meghatározó, lényegtelen, hogy abszolút vagy relatív gyakoriságokról van-e szó. A haranggörbét Gauss-görbének is nevezik. A folyékony mosószer vagy a kilós kenyér példáiból egyértelműen következik, hogy számos ilyen haranggörbe létezik, melyből egy konkrétat két értékkel, úgynevezett paraméterrel lehet leírni: ami körül csoportosulnak az egyes értékek, azaz ahol a legmagasabb a függvény, illetve egy olyan jellemzővel, ami arról ad információt, hogy az egyes mérési

eltérések átlagosan milyen nagyok. Az előbbi a várható érték, az utóbbi a szórás. Ha nagyok az eltérések, akkor laposabb a harang, ha kisebbek, akkor pedig csúszosabb lesz.

2.2 Még több gyakorlati jelentőség: Quetelet és Poincaré

A görbét aztán egy belga matematikus, Lambert Adolphe Jacques Quetelet (1796-1874) minden megfigyelésében megtalálni vélte, beleértve a bűnügyi statisztikákat is. (Bellos, Alex, 2010, David Freedman, Robert Pisani, Roger Purves, 2007)

Henri Poincaré (1854-1912) is ismerte ezt az eloszlást, és a gyakorlatba is átültette. Gyanúja szerint a helyi pék szándékosan becsapta őt, amikor kisebb súlyú kenyereket adott el neki az előíráshoz képest. Egy éven át minden nap megmérte a vásárolt kilós kenyeret, mivel tudta, hogy az egyes esetek természetesen eltérhetnek egymástól. Hosszú távon viszont várta, hogy az eredmény az ismert haranggörbére hasonlítson – így az egyes véletlenszerű ingadozások a liszt mennyiségében vagy a sütési időben összességében kioltathatják egymást. Az eredmény az előzetes várakozást igazolta, valóban haranggörbét kapott, azonban annak csúcsa a 950 grammos értéknél volt. Átlagosan tehát 50 grammal kisebb kenyeret kapott. A párizsi hatóságok ez alapján megrótták a péket. Poincaré azonban nem hagyta abba a méréseit, hanem tovább folytatta. A következő év végén azt találta, hogy nem a várt szimmetrikus görbe rajzolódott ki, hanem annak jobbra dőlt változata. Ebből már látszott, hogy nem csak a véletlen hibák befolyásolták az eredményt. A görbe alakjából világossá vált, hogy a pék továbbra is csal, de személyesen neki a legnagyobb kenyeret adja el. [2]

3 Jelentősége napjainkban

3.1 Jogszabály és statisztika

Poincaré módszere máig él: a fogyasztóvédelemnek (bizonyos tekintetben) ez az egyik alapja. A jogszabály nem arra kötelez, hogy minden termék pontosan egyforma legyen, hiszen ez lehetetlen. Egy csomagolás tartalmának tényleges mennyisége átlagosan legalább annyi kell legyen, mint a névleges mennyiség, illetve külön előírások vonatkoznak a negatív eltérések megengedett mértékére is. Jogszabály (13/2008. (VIII. 8.) NFGM-FVM együttes rendelet) részletesen is

rendelkezik a termékek ellenőrzésének statisztikai referenciamódszerére vonatkozó követelményeiről²⁴.

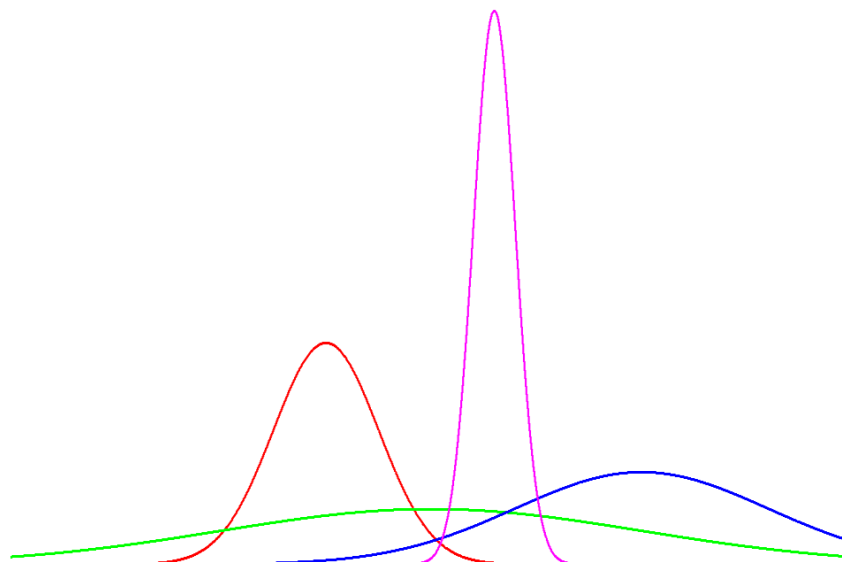
Ez az Európai Unió jogával való harmonizációt is érinti, mivel a különböző irányelveknek való megfelelést is biztosítja. A mintavételes eljárás során főszabály szerint roncsolásmentes vizsgálatokat kell végezni; amennyiben az nem lehetséges, roncsolásos módon kell ellenőrzést végezni, ami a csomagolás meg/felbontásával jár, illetve annak roncsolásával. A mérések mögött pedig referenciául a haranggörbe bújik meg.

Ez, az empirikus megfigyeléseket leíró normális eloszlás matematikailag is felírható. Sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (1)$$

Itt már a két paraméter explicit formában is megjelenik: μ és σ , ami a várható érték és a szórás, azaz az átlagos négyzetes eltérés. Mindkettő valós szám, σ pedig pozitív is kell legyen. Az egyes esetre vonatkoztatott normális eloszlás a két paraméter konkrét értékéből alakul. Különböző várható értékekre és szórásra mutat példát a 2. ábra.

²⁴ 13/2008. (VIII. 8.) NFGM-FVM együttes rendelet az előrecsomagolt termékek névleges mennyiségére vonatkozó szabályok megállapításáról és azok ellenőrzési módszereiről



2. ábra: Normális eloszlások
Forrás: saját szerkesztés

Egy változó normális eloszlása esetén a jelölés:

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \quad (2)$$

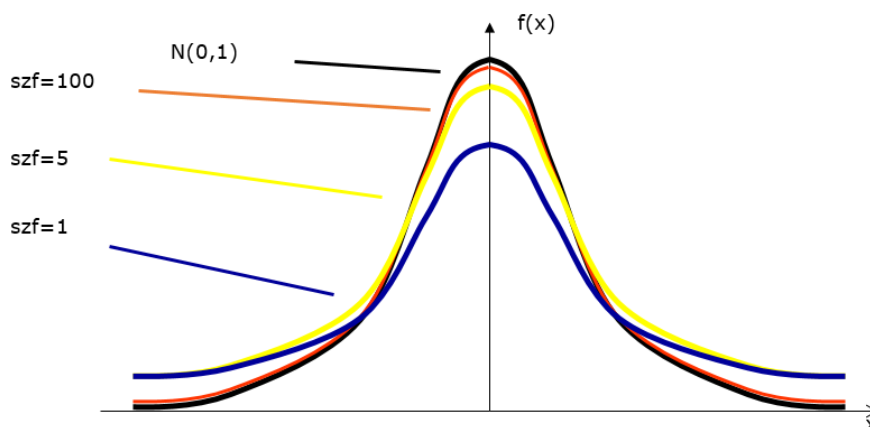
A várható érték nullasága egységnyi szórás mellett standard normális eloszlást eredményez, melyre bármely normál eloszlás transzformálhatóságának módját a

$$\frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1) \quad (3)$$

összefüggés mutatja.

Bizonyos feltételek teljesülése esetén a binomiális eloszlás közelítésére is alkalmas a normális eloszlás (Louise Swift and Sally Piff, 2014).

A normális eloszlás "rokonának" tekinthető William Sealy Gosset álnéven (Student) publikált eloszlása: a t-eloszlás, vagy Student-eloszlás. Ez szintén harang alakú, és a várható értékre szimmetrikus. A görbe alakja azonban a szabadságfok alakulásától függ. Különböző szabadságfokok melletti alakját mutatja a 3. ábra



3. ábra: Student-féle t-eloszlás különböző szabadságfokok mellett
 Forrás: saját szerkesztés

Mint az ábrán látszik, a normális eloszlásnál jellemzően laposabb a görbe, de a szabadságfok növelésével határértéke a végtelenben a (standard) normális eloszlás lesz. A görbe alatti területet egynek tekintve szintén sűrűségfüggvényről van szó, mely e voltánál fogva az egyes értékek előfordulási (relatív) gyakoriságát mutatja.

Egy mintaátlagos becslés esetén tipikusan $(n - 1)$ szabadságfokú az eloszlás. Kis mintaelemszám és ismeretlen sokasági szórás esetén a normális eloszlás helyett ez alkalmazandó.

Jogszába²⁵ alapján például előrecsomagolt termék tétele akkor fogadható el, ha a mintában az n számú termékek tényleges tartalmának számtani középértéke nagyobb, mint a

$$Q_n = \frac{s}{\sqrt{n}} \cdot t_{1-\alpha}^{(n-1)} \quad (4)$$

kifejezés értéke, ahol:

- Q_n : az előrecsomagolt termékek névleges mennyisége;
- s : a korrigált tapasztalati szórás;
- n : a minta elemszáma;

²⁵ 13/2008. (VIII. 8.) NFGM-FVM együttes rendelet az előrecsomagolt termékek névleges mennyiségére vonatkozó szabályok megállapításáról és azok ellenőrzési módszereiről

- $t_{1-\alpha}^{(n-1)}$: a Student-féle t-eloszlás $(n-1)$ szabadságfokú 99,5%-os megbízhatósági szinthez tartozó értéke.

A fentiekből egyértelmű, hogy a jogszabály az intervallumbecslés módszerére épít, és csak egy előre rögzített, magas megbízhatóság mellett tekinti elfogadhatónak az eredményt. A rögzített szignifikancia azt jelzi, hogy csupán 0,005 lehet a valószínűsége annak, hogy elfogadjuk a minta alapján a tételt, de az a valóságban mégsem lenne elfogadható; ez azt jelenti, hogy átlagosan 1000 esetből 5 alkalommal fordulhat ilyen elő. Nem szabad elfelejteni, hogy ezek a módszerek feltételezik a valószínűségi változó sokasági normális eloszlását. A sokasági normális eloszlás ellenőrzésére is vannak módszerek; ezt lehet grafikusán is elvégezni (pl. hisztogram, Q-Q plot, P-P plot), de vannak statisztikai próbák is rá (χ^2 próba, Kolmogorov-Szmirnov teszt, Lilliefors teszt). A Shapiro-Wilk teszt szintén alkalmas annak a nullhipotézisnek ellenőrzésére, hogy az adatok normális eloszlású sokaságból származnak-e? A tesztfüggvény

$$W = \frac{(\sum_{i=1}^n a_i x_i)^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (5)$$

alakú, ahol

- x_i : az i -edik rendezett statisztika, azaz az i -edik legkisebb elem a mintában;
- \bar{x} : a mintaátlag;
- a_i : együttható, ami a következőképp számítható:

$$(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) = \frac{m^T V^{-1}}{(m^T V^{-1} V^{-1} m)^{1/2}} \quad (6)$$

ahol m az n darab standard normális eloszlású rendezett statisztika várható értékének vektora, V pedig a kovariancia mátrixa.

A szórás legjobb lineáris torzítatlan becslése (BLUE: best linear unbiased estimator)

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i / \sqrt{(n-1)} \quad (7)$$

míg a korrigált tapasztalati szórás pedig

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 / (n-1)} \quad (8)$$

A teszt lényege tehát egyértelműen az, hogy a tört számlálója és nevezője ugyanazt a mennyiséget becsüli a nullhipotézis fennállása esetén. Számítógépes szoftverek már segítséget nyújtanak a hipotézis ellenőrzésében, így az ellenőrzés jelentősen lerövidülhet.

Az egyes eloszlásoknak való megfelelés alkalmas lehet arra is, hogy különböző felmérések eredményeiben kimutassa, hogy az adatokat manipulálták-e? Különböző termékjellemzők is ilyen eloszlással írhatók le, mint például a már említett tömeg, de akár az emberi testmagasság vagy IQ alakulása, vagy termékek meghibásodásának alakulása.

3.2 A six sigma normális háttere

A vevői igények mára túlmutatnak azokon az elvárásokon, melyek évezedekkel ezelőtt még elfogadhatóak voltak, azaz, hogy egy folyamat, egy szolgáltatás 99%-ban legyen megfelelő. Ez nem csupán termékekre, hanem szolgáltatások nyújtására is igaz. Ez egy mobiltelefon előfizetés esetén azt jelentené, hogy naponta átlagosan 14,4 percen át a szolgáltatás nem biztosított. A hibákat ilyen okok miatt már nem is százalékban, hanem például egymillió lehetőségre vetítve adják meg. Egy, a folyamatokban előforduló hibák számának csökkentését célzó módszer a six sigma módszer, ami a normál eloszlásra is épít. Célja a nulla hiba elérése. Lényege, hogy a várható értéktől való eltérést egészen hat szigmaig elfogadhatóvá tegye, illetve fordítva, ekkora távolságra redukálja le a folyamatok elfogadható ingadozásait. Azaz a normális eloszlást követő folyamatnak csupán ezen túli része legyen hibás. Ez egymillió esetre vonatkoztatva 3,4 hiba előfordulását enged meg. Az előbbi példánál maradva ez 2 év (pontosabban 694,4 nap) alatt jelentene 3,4 perc kimaradást a telekommunikációs szolgáltatásban. A szervezeten belüli kommunikáció a hálózatkutatás egyik fontos területe, melyhez alapvetően szükséges az említett szolgáltatás: a kommunikáció napi 14,4 perces leállása nem engedhető meg.

Kutatások kimutatták, hogy nem csak üzleti, hanem a szocio-emocionális hálózatok kialakulásában is a kapcsolattartás fontos terület, amit mára már a telefonos és internet alapú kommunikációs technológiák biztosítanak áthidalva a földrajzi elhelyezkedésből fakadó elkülönülés problémáit. (Szilágyi Győző Attila, 2018)

A tipikus szigma érték 3 vagy 4 a vállalatoknál. A six sigma a DMAIC (Define, Measure, Analyze, Improve, Control) módszerére épít, ez által javíthatóak a folyamatok.

A fogyasztói elégedettség (mérése), a folyamatok javítása pedig kiemelkedően fontos. A General Motors a 60-as 70-es években nagy piaci részesedéssel rendelkezett az Egyesült Államokban, amikor a gazdasági helyzet kedvező volt számukra, azaz a piac mindent "felszívott", amit termeltek. A termelésorientált folyamatok azonban hátrányt jelentettek később, mikor a japán Toyota felismerve a helyzetet, a fogyasztói igényekre, azok feltárására és a minőség hangsúlyozására építve visszaszorította a GM-et a saját, hazai piacán. A vállalati vezetők 90%-a már 1994-ben osztotta azt a feltevést, hogy a fogyasztói elégedettség

maximalizálása egyben a profitot is maximalizálja. (Hofmeister Tóth Ágnes, Simon Judit, Sajtos László, 2003)

A bizalom megteremtése az üzleti interakciók keretében más szempontból is elsődleges: egy, az osztrák-magyar kapcsolatok során megnyilvánuló üzleti magatartás vizsgálatával foglalkozó kutatás eredménye az volt, hogy a bizalom megteremtése prioritást élvez a feladatok teljesítésével, végrehajtásával szemben. Ebből következik, hogy a bizalom elvesztése mennyire drasztikusan hat az üzleti folyamaokra. A megszerzett bizalom fenntartása pedig csak a folyamatos, magas minőség, azaz a fogyasztói elégedettség fenntartása mellett lehetséges. (Szőke Júlia, Kovács Norbert, 2014)

Következtetések

Az egyes megfigyelések olyan eredményre vezetnek, melyek matematikailag is modellezhetők. Számos, a mai napig alkalmazott és naprakésznek tekintett illetve folyamatosan fejlesztett módszer évszázadokkal ezelőtti megfigyelésekre nyúlik vissza. Mivel a megfigyelés a gyakorlatból ered, a modellek segítséget nyújthatnak abban, hogy empirikus vizsgálatok esetén más területeken is alkalmazzuk azokat az összefüggéseket, melyekkel a természettudományok alapvető segítséget nyújtanak a társadalomtudományoknak, mérnöki tudományoknak. Ilyen tipikus segítség a normális eloszlás görbéje.

Hivatkozások

- [1] 13/2008. (VIII. 8.) NFGM-FVM együttes rendelet az előrecsomagolt termékek névleges mennyiségére vonatkozó szabályok megállapításáról és azok ellenőrzési módszereiről
- [2] Bellos, Alex: Alex's Adventures in Numberland. Bloomsbury, 2010
- [3] David Freedman, Robert Pisani, Roger Purves: Statistics (4th Edition), W.W.Norton & Company Inc, 2007
- [4] Hofmeister Tóth Ágnes, Simon Judit, Sajtos László: Fogyasztói elégedettség. Alinea Kiadó, Budapest, 2003
- [5] Kolnhofer-Derecskei Anita, Csongrádi Gyöngyi, Tóth Arnold: Hogyan befolyásolja a keretbe foglalási hatás a fizetési hajlandóságot egy újonnan bevezetendő COVID-19 gyógyszer esetén? GRADUS 9: 1 pp. 1-9. Paper: 2022.1.ECO.001 , 9 p. (2022)
- [6] Louise Swift and Sally Piff: Quantitative Methods for Business, Management and Finance, Macmillan Education UK, 2014
- [7] Szilágyi Győző Attila: Mapping of Organizational Mastenbroek Networks by Network Theory Methodology. Óbuda University e-Bulletin, Vol. 8, No. 3, 2018

- [8] Szőke Júlia, Kovács Norbert: Kis- és középvállalkozások képviselőinek üzleti magatartása kultúraközi interakciós helyzetekben. Társadalomkutatás 32 (2014) 2, pp. 162-175